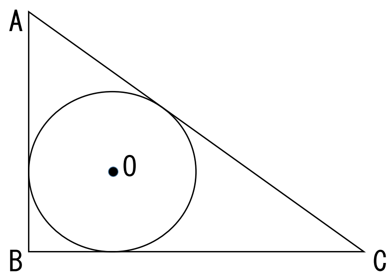
発展・活用問題

中学３年数学　６章 円　　　　　　　　　　年　　組　　番 氏名

太郎さん、花子さん、次郎さんの３人は、円の勉強をしています。

授業で出された問題

∠B＝90°の直角三角形 ABC がある。
この直角三角形に、図のように３つの辺で接する円 O がある。
直角三角形の辺の長さが
$AB=c$、$BC=a$、$CA=b$ で、
円 O の半径を r とする。
r を、a、b、c を用いて表しなさい。



（１）太郎さんはこの**問題**を考える前に、辺 BC、CA、AB と円 O との接点をそれぞれ P、Q、R として、四角形 PORB が正方形であることを証明しておけば、円外の点から円にひいた接線の長さが等しいことを利用して、r を、a, b, c を使って表せると考えました。

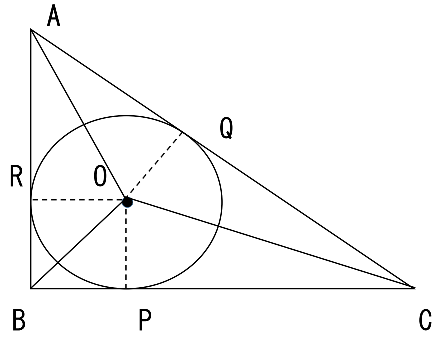
（ⅰ）四角形 PORB が正方形であることを証明しなさい。

（ⅱ）太郎さんの考え「円外の点から円にひいた接線の長さが等しい」ことを利用して、円の半径 r を、a, b, c を使って表しなさい。

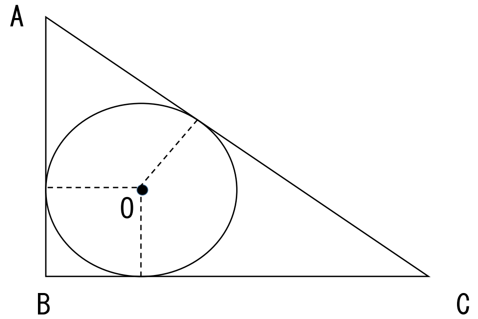
（2）花子さんは、　式　$r(c-r)+r^2+r(a-r)=\frac{1}{2}ac$

を立てて　$r=\frac{(a+c)-\sqrt{a^2+c^2}}{2}$　を求めました。

花子さんは、図形のどのような性質を使って
式を立てたと考えられますか。
花子さんの考えを説明しなさい。



（3）次郎さんは、△ABC を３つの三角形 OAB、OBC、OCA に分けて求めました。次郎さんの考えを使って内接する円の半径rを、a, b, cを使って表しなさい。



（4）太郎さんは、「（1）のｒの値、（2）のｒの値、（3）のｒの値は、どれも同じ三角形の内側に接する円の半径だから等しいはずである。」と考えました。これらの値が同じ値であることを示すには、何が言えればいいですか。方針を文章で書きなさい。（計算する必要はありません。）

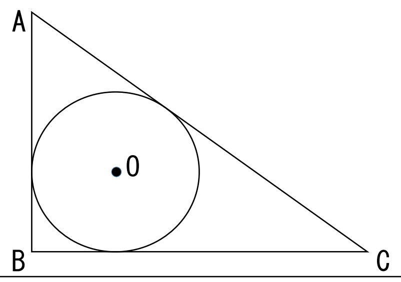
中学３年数学　６章 円【解答・解説】　　　　年　組　番 氏名

太郎さん、花子さん、次郎さんの３人は、円の勉強をしています。

【出題の趣旨】
○　円の接線の性質を利用して、課題を解決できる。
○　式から、面積を利用した求め方を読み取ることができる。

授業で出された問題

∠B＝90°の直角三角形 ABC がある。
この直角三角形に、図のように３つの辺で接する円 O がある。
直角三角形の辺の長さが
AB=c、BC＝a、CA＝b で、
円 O の半径をr とする。
rを、a、b 、cを用いて表しなさい。

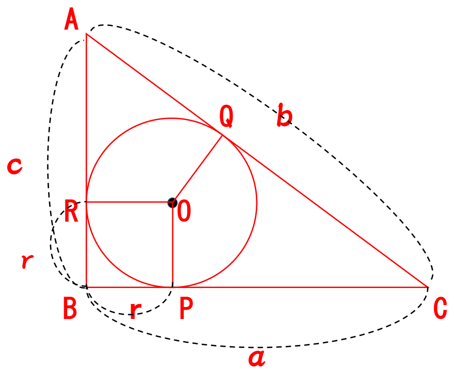


（1）太郎さんはこの課題を考える前に、辺 BC、CA、AB と円 O との接点をそれぞれ P、Q、R として、四角形 PORB が正方形であることを証明しておけば、円外の点から円にひいた接線の長さが等しいことを利用して、rを、a, b, cを使って表せると考えました。

（ｉ）四角形 PORB が正方形であることを証明しなさい。

＜証明＞

（ｉ）　接線と接点を通る円の半径は垂直に交わるから、
∠OPB＝∠ORB＝90°　・・・　①
仮定より
∠RBP＝90°　・・・・・・・　②
OP＝OR＝ r　・・・・・・・　③
①、② より、四角形 BPOR は長方形である。
③より、この長方形は隣り合う辺の長さが等しい。
よって、四角形 BPOR は正方形である。



（ⅱ）太郎さんの考え「円外の点から円にひいた接線の長さが等しい」ことを利用して、円の半径rを、a, b, cを使って表しなさい。

答　$r = \dfrac{a+c-b}{2}$

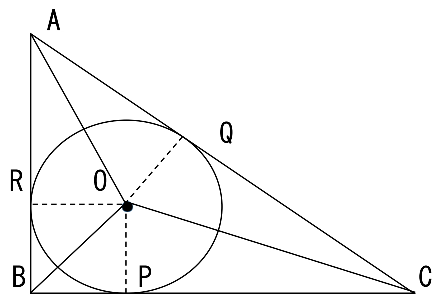
＜解説＞

(ii)①より、　BP＝BR＝ r ・・・④
④と仮定 AB=c、BC＝a、CA＝b　から、AR＝$c-r$・・・・・⑤　　PC＝$a-r$・・・・・⑥　で、
円外の点から円にひいた接線の長さが等しいから AQ＝AR＝$c-r$・・・⑦、CQ＝PC＝$a-r$・・・⑧
AQ＋CQ＝AC＝ b　と⑦、⑧より、
$(c-r)+(a-r)=b$
$c+a-2r=b$
$2r=a+c-b$　　　$r = \dfrac{a+c-b}{2}$

（２）花子さんは、　式　$r(c-r)+r^2+r(a-r)=\frac{1}{2}ac$

を立てて　$r=\frac{(a+c)-\sqrt{a^2+c^2}}{2}$　を求めました。

花子さんは、図形のどのような性質を使って
式を立てたと考えられますか。
花子さんの考えを説明しなさい。



答

△ABC を 3 つの四角形 AROQ、BPOR、CQOP に分けたとき、
この 3 つの四角形の面積の和は、元の三角形 ABC の面積の和に等しい。
という性質を使った。

＜解説＞

AB＝c、RB＝ｒだから、AR＝c―ｒ、また、RO＝ｒ　より、

$$\triangle ARO=\frac{1}{2}AR\times RO=\frac{1}{2}(c-r)r$$　**だから、**

四角形 AROQ＝△ARO＋△AQO
＝2△ARO
＝(c－ｒ) ｒ
＝cｒ－ｒ²・・・・・・・・・・・①

同様にして、
四角形 BPOR＝ｒ²・・・・・・・・・・・・・②
四角形 CQOP＝ar－ｒ²・・・・・・・・・・・③

①＋②＋③＝△ABC＝$\frac{1}{2}ac$　より、$(cr-r^2)+r^2+(ar-r^2)=\frac{1}{2}ac$

左辺を整理して両辺を 2 倍すると、　$2cr+2ar-2r^2=ac$

$$2r^2-2(a+c)r+ac=0$$

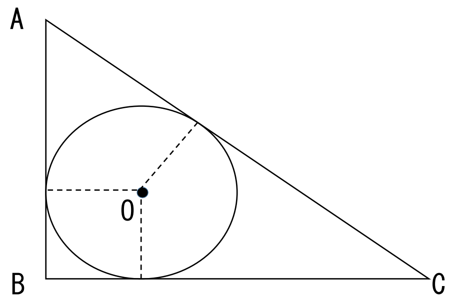
ｒについての 2 次方程式を解くと、

$$r=\frac{(a+c)\pm\sqrt{a^2+c^2}}{2}$$

0＜ｒ＜a　より、

$$r=\frac{(a+c)-\sqrt{a^2+c^2}}{2}$$

（３）次郎さんは、△ABC を３つの三角形 OAB、OBC、OCA に分けて求めました。次郎さんの考えを使って内接する円の半径rを、a, b, cを使って表しなさい。



答　r $=\dfrac{ac}{a+b+c}$

（解き方）

△ABC$=\frac{1}{2}\times BC\times AB=\frac{1}{2}ac$ ・・・・・・・・・・・・・・・①

AB＝c、OR＝ｒだから、　△OAB$=\frac{1}{2}cr$　・・・・・・・・・・②

BC＝a、OP＝ｒだから、　△OBC$=\frac{1}{2}ar$　・・・・・・・・・・③

CA＝b、OQ＝ｒだから、　△OCA$=\frac{1}{2}br$　・・・・・・・・・・④

②＋③＋④＝①　より、

$$\frac{1}{2}cr+\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br=\frac{1}{2}ac$$

$$cr+ar+br=ac$$

$$(a+b+c)\,r=ac$$

$$r=\frac{ac}{a+b+c}$$

（４）太郎さんは、「（１）のｒの値、（２）のｒの値、（３）のｒの値は、どれも同じ三角形の内側に接する円の半径だから等しいはずである。」と考えました。これらの値が同じ値であることを示すには、何が言えればいいですか。方針を文章で書きなさい。（計算する必要はありません。）

＜方針＞（１）のｒの値から（２）のｒの値や（３）のｒの値を引いて、０になればよい。
または、
（１）のｒの値や（２）のｒの値を（３）のｒの値で割って、１になればよい。